DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1986 D'INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : MATHEMATIQUES (II)

DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 6

Les deux problèmes sont indépendants. La notation prendra en compte la rigueur des démonstrations et la clarté de leur présentation.

PROBLEME I

Les parties A et B sont dépendantes. La partie A établit des résultats classiques sur les suites récurrentes et les calculs de déterminants. Ces résultats, que l'on pourra admettre, seront utilisés dans la partie B.

PARTIE A

1) Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathbb{C}^*$. On considère la relation (A1) :

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n = 0 \qquad (A1)$$

Montrer que l'ensemble E des suites complexes qui vérifient (A1) forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 2 (on pourra considérer des suites f_n et g_n telles que $f_0 = g_1 = 1$ et $f_1 = g_0 = 0$).

2) On suppose $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Montrer que tout élément de E peut s'écrire $u_n = a S_1^n + b S_2^n$ où a, b, S_1 et S_2 sont des paramètres complexes.

3) On suppose $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. Montrer que tout élément de E peut s'écrire

$$u_n = (a + b\,n).S_1^n$$

4) Application : donner, en fonction de n, l'expression de la suite u_n définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0 \text{ et } u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

5) Soit $\Delta_n(x, y, z)$ le déterminant d'ordre n défini par

$$\Delta_n(x,y,z) = \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ z & y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & y & x & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & z & y & x \\ 0 & \cdots & 0 & z & y \end{vmatrix}$$

avec $x \in \mathbb{C}^*$, $y \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^*$

Montrer qu'en posant $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = y$ la suite des Δ_n vérifie une relation du type (A1).

En déduire, en posant $D = \sqrt{y^2 - 4x}$

$$\Delta_n(x,y,z) = \frac{1}{D}\left[\left(\frac{y+D}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{y-D}{2}\right)^{n+1}\right] \text{ si } D \neq 0$$

$$= (n+1)\left(\frac{y}{2}\right)^n \text{ si } D = 0$$

PARTIE B

1) Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$ et la relation (B1) :

$$\forall k \in]1, p[: \begin{cases} u_{n+1,1} = \beta u_{n,1} + \gamma u_{n,2} \\ u_{n+1,k} = \alpha u_{n,k-1} + \beta u_{n,k} + \gamma u_{n,k+1} \\ u_{n+1,p} = \alpha u_{n,p-1} + \beta u_{n,p} \end{cases} \qquad (B1)$$

Montrer que l'ensemble F des suites de $\mathbb{C}^p$ vérifiant (B1) $\forall n \in \mathbb{N}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Quelle est sa dimension ?

TOURNER S.V.P.

2) Soit U_n le vecteur de $\mathbb{C}^p$ dont les composantes dans la base canonique sont $(u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots\ldots\ldots u_{n,p})$. Montrer que $U_n = M^n U_o$ où M est une matrice de taille p x p que l'on déterminera.

3) On suppose dans la suite du problème que $\gamma = \bar{\alpha}$ et $\beta = 1$. Montrer que M est une matrice hermitienne (c'est à dire telle que ${}^t\bar{M} = M$)

4) On admet que M peut s'écrire $M = R \Lambda {}^t\bar{R}$ où R est une matrice complexe de taille p x p telle que ${}^t\bar{R}R = Id$ (ses éléments seront notés R_{JK}) et Λ une matrice réelle diagonale de taille p x p (les éléments diagonaux seront notés λ_k). Montrer que $M^n = R \Lambda^n {}^t\bar{R}$. Que peut-on dire de Λ^n ?

5) Soit C_k le vecteur de $\mathbb{C}^p$ dont les coordonnées sont $(R_{1,k}, \ldots\ldots, R_{p,k})$. Montrer que C_k est vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_k. Que vaut la somme des carrés des modules des composantes de C_k ?

6) Calculer les valeurs propres de M. Pour cela, on utilisera les résultats de la partie A et on cherchera les λ_k sous la forme $1 - 2|\alpha|\cos\theta_k$

7) a) Calculer $\sum_{j=1}^{p} \sin^2 \frac{jk\pi}{p+1}$ pour $k \in [1, p]$.

b) En déduire les vecteurs propres C_k associés aux λ_k. (On pourra montrer que les $(C_k)_j$ obéissent à une relation de type (A1) avec $(C_k)_0 = 0$ et $(C_k)_1$ arbitraire, puis on normera les vecteurs).

8) Déduire de ce qui précède une expression des éléments $m_{j,k}(n)$ de la matrice M^n sous forme $(P_{j-k,n}(|\alpha|) - P_{j+k,n}(|\alpha|)).(\frac{-\alpha}{|\alpha|})^{j-k}$

où $P_{m,n}(x)$ est un polynôme de degré n que l'on ne cherchera pas à développer.

9) Application. Soient $u_{n,1}$, $u_{n,2}$ et $u_{n,3}$, trois suites complexes définies par :

$$\begin{cases} u_{0,1} = 1 \qquad u_{0,2} = u_{0,3} = 0 \\ u_{n+1,1} = u_{n,1} - i\,u_{n,2} \\ u_{n+1,2} = i\,u_{n,1} + u_{n,2} - i\,u_{n,3} \\ u_{n+1,3} = i\,u_{n,2} + u_{n,3} \end{cases}$$

Donner les expressions de ces suites en fonction de n. Ces suites convergent-elles quand n tend vers l'infini ?

10) Comment utiliser les résultats obtenus précédemment avec $\beta = 1$ dans (B1), lorsque β est un réel non nul quelconque (γ et α étant toujours complexes conjugués) ?

PROBLEME II

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation dans l'ensemble des parties non vides de E définie par

A $\mathcal{R}$ B $\Leftrightarrow$ il existe une injection de A → B.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.

2) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ou une relation d'équivalence ?

3) Montrer: A $\mathcal{R}$ B $\Leftrightarrow$ il existe une surjection de B → A.

4) A-t-on compatibilité de $\mathcal{R}$ avec la réunion ? (c'est à dire A $\mathcal{R}$ B et C $\mathcal{R}$ D $\Rightarrow$ (A ∪ C) $\mathcal{R}$ (B ∪ D)) ; et avec l'intersection ?

5) On suppose E fini. Comment s'exprime la relation $\mathcal{R}$? Déduire que s'il existe une injection de A vers B et une surjection de A vers B, toute injection de A vers B est une surjection.